6. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Что новое мы изучим?

Изучив материал этой главы,

1) Ты будешь знать следующие новые понятия:

квадратный корень из числа, квадратное уравнение, полное квадратное уравнение, неполное квадратное уравнение, приведенное квадратное уравнение, дискриминант квадратного уравнения, квадратное уравнение с двумя неизвестными, система нелинейных уравнений второй степени с двумя неизвестными;

2) Ты будешь знать следующие свойства и соотношения:

соотношение между квадратным корнем и модулем, квадратный корень из произведения, квадратный корень из дроби, формулу корней квадратного уравнения, теорему Виета;

3) Ты будешь уметь:

находить квадратный корень из числа с помощью калькулятора или таблиц, находить квадратный корень из произведения или дроби, решать перечисленные в пункте 1 уравнения и системы уравнений и использовать их при решении текстовых задач, пользоваться дискриминантом квадратного уравнения или теоремой Виета при исследовании решений этого уравнения.

6.1. Квадрат числа

Из ранее изученного известно, что произведение двух равных множителей $a \cdot a$ записывается в виде квадрата числа a, т.е. $a \cdot a = a^2$. Отсюда следует, что если $a = 0$, то $a^2 = 0 \cdot 0 = 0$. Если $a \neq 0$, то $a^2 > 0$, так как произведение двух положительных чисел, как и произведение двух отрицательных чисел, всегда положительно.

Пример 1.

$(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 5 \cdot 5 = 25$

$(-1{,}4)^2 = (-1{,}4) \cdot (-1{,}4) = 1{,}4 \cdot 1{,}4 = 1{,}96$

$(-0{,}8)^2 = (-0{,}8) \cdot (-0{,}8) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64$

Итак:

квадрат любого рационального числа неотрицателен.

Квадрат числа можно найти с помощью калькулятора. Для нахождения, например, квадрата числа 1,5 будем действовать по схеме:

1,5 $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$.

На экране калькулятора появляется ответ: 2,25. Если на калькуляторе есть клавиша $\boxed{x^2}$, то вычисления производятся по схеме:

1,5 $\boxed{x^2}$

Пример 2.

Найдем $0{,}24^2 = 0{,}0576$ по схеме 0,24 $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ или по схеме 0,24 $\boxed{x^2}$.

Аналогично $(-1{,}7)^2 = 2{,}89$ по схеме 1,7 $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ или по схеме 1,7 $\boxed{x^2}$.

Упражнения

А.

1261. Ответь на основании текста на вопрос и выполни задания.

1) Почему квадрат числа не может быть отрицательным?

2) Составь схему для вычисления квадрата числа с помощью калькулятора.

а) $0{,}7^2$; б) $2{,}43^2$; в) $(-0{,}91)^2$; г) $(-9{,}876)^2$.

1262. Найди квадрат числа с помощью калькулятора.

1) 15; 28; 41; 57;

2) 0,31; 4,1; 37,4; 126,2;

3) –0,91; –6,8; –41,5; –234;

4) $\frac{3}{4}$; $1\frac{3}{4}$; $-\frac{1}{4}$; $-2\frac{1}{2}$.

$(ab)^n = a^n \cdot b^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

1263. Упрости выражение (если это возможно) и вычисли.

1) $2{,}4^2 \cdot 2^2$; 2) $7{,}5^2 \cdot 4^2$; 3) $(-5{,}2)^2 \cdot 3^2$; 4) $(-4{,}4)^2 \cdot (-5)^2$;

5) $\frac{7^2}{2^2}$; 6) $\frac{12{,}5^2}{5^2}$; 7) $\frac{(-1{,}8)^2}{6^2}$; 8) $\frac{(-2{,}8)^2}{(-0{,}4)^2}$;

9) $3{,}7^2 \cdot 5^2 - 2{,}5^2 \cdot 2^2$; 10) $(-4{,}5)^2 \cdot 4^2 - 8^2 \cdot (-1{,}5)^2$;

11) $\frac{4{,}8^2}{(-1{,}6)^2} \cdot 5^2 - \frac{(-1{,}5)^2}{0{,}5^2}$; 12) $\frac{(-7{,}5)^2}{(-1{,}5)^2} - \frac{(-0{,}8)^2}{(-0{,}4)^2}$.

1264. Упрости выражение и вычисли. Ответ округли до сотых.

1) $\frac{5{,}4^2 - 3{,}1^2}{4{,}25 \cdot 11{,}5}$; 2) $\frac{6{,}3 \cdot 12{,}1}{18{,}4^2 - 5{,}8^2}$; 3) $\frac{7{,}4^2 - 6{,}3^2}{7{,}95^2 - 5{,}75^2}$; 4) $\frac{12{,}7^2 - 9{,}3^2}{0{,}71^2 - 0{,}37^2}$.

1265. Вычисли площадь закрашенной части квадрата $ABCD$ (рис. 6.1–6.3).

1266. В квадрат $ABCD$ помещены два полукруга одного радиуса (рис. 6.4). Сколько процентов составляет площадь закрашенной части квадрата от всей площади квадрата?

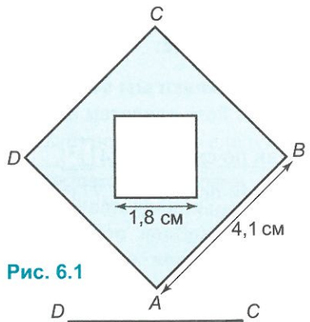

Рис. 6.1

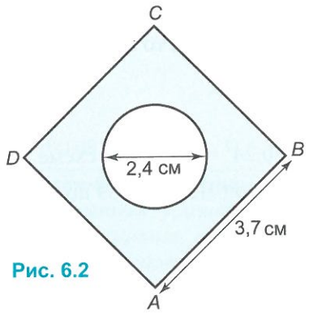

Рис. 6.2

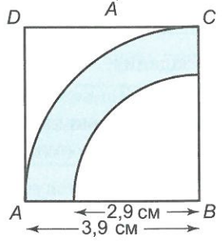

Рис. 6.3

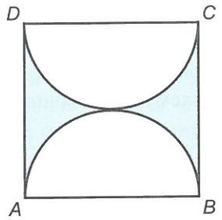

Рис.6.4

Б.

1267. Вычисли значение выражения. Если возможно, сначала упрости. Ответ дай с точностью до 0,01:

1) $a^4b^4 + 4a^3b^3c + 4a^2b^2c$, если $a = 2{,}4$, $b = 1{,}6$, $c = 2$;
2) $a^2c^2 - 2a^3b^2c^2 + a^4b^4$, если $a = 14{,}6$, $b = 2{,}6$, $c = 9{,}4$;
3) $(a^2b + b^2c)(a^2b - b^2c)$, если $a = 14{,}6$, $b = 0{,}8$, $c = 5{,}2$.

1268. Четвертая часть дуги окружности радиуса 4,8 см и окружность радиуса 0,6 см разбивают квадрат *ABCD* (рис. 6.5) на части. Найди площадь закрашенной части квадрата.

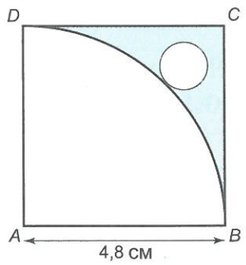

Рис. 6.5

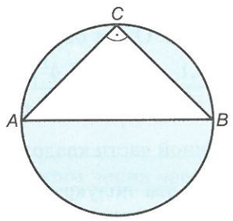

Рис. 6.6

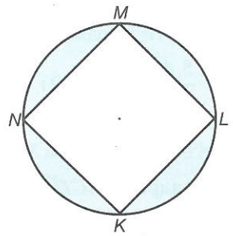

Рис. 6.7

1269. В круг вписан прямоугольный равнобедренный треугольник *ABC* (рис. 6.6) с гипотенузой 9,06 см. Найди площадь закрашенной части круга.

1270. В круг вписан квадрат *KLMN* (рис. 6.7). Найди площадь закрашенной части круга, если его радиус равен 4,2 см.

6.2. Квадратный корень из числа

1. При решении различных заданий часто возникает необходимость нахождения числа по его квадрату. Пусть, например, известно, что площадь квадрата равна 9 см^2. Найти сторону этого квадрата значит найти число, квадрат которого равен 9. Подбором нетрудно найти два числа, квадраты которых равны 9. Это числа 3 и –3. Длина стороны квадрата может быть только положительным числом. Тогда получим ответ: сторона квадрата равна 3 см.

Положительное число, квадрат которого равен 9, называется **квадратным корнем** из числа 9. Обозначают это число $\sqrt{9}$ (читай: *квадратный корень из* 9). Следовательно, $\sqrt{9} = 3$. Число –3 противоположно числу $\sqrt{9}$.

Аналогично $\sqrt{36} = 6$, так как $6^2 = 36$; $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$, так как $0{,}1^2 = 0{,}01$; $\sqrt{0} = 0$, так как $0^2 = 0$.

Квадратным корнем из положительного числа называется такое положительное число, квадрат которого равен данному числу. Квадратный корень из нуля равен нулю.

1271. Найди значение корня.

1) $\sqrt{16}$; 2) $\sqrt{64}$; 3) $\sqrt{81}$; 4) $\sqrt{100}$;
5) $\sqrt{121}$; 6) $\sqrt{10\,000}$; 7) $\sqrt{0{,}36}$; 8) $\sqrt{0{,}64}$.

2. Квадратный корень из отрицательного числа извлечь нельзя, так как в множестве известных нам к настоящему времени чисел не существует числа, квадрат которого был бы отрицательным числом. Из определения квадратного корня очевидно следует, что, например,

$\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$; $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$.

Аналогично $\sqrt{6^2} = \sqrt{36} = 6$; $\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6$; $\sqrt{0^2} = \sqrt{0} = 0$. Таким образом, квадратный корень из данного квадрата положительного числа равен самому этому числу, а квадратный корень из квадрата отрицательного числа равен противоположному ему числу. Это значит:

$\sqrt{5^2} = 5$; $\sqrt{6^2} = 6$; $\sqrt{(-5)^2} = -(-5) = 5$; $\sqrt{(-6)^2} = -(-6) = 6$.

Итак,

если $a \geq 0$, то $\sqrt{a^2} = a$;

если $a < 0$, то $\sqrt{a^2} = -a$. Обобщим:

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|.}$$

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0 \\ -a, \text{ если } a < 0 \end{cases}$$

Из определения квадратного корня следует, например, что

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3;\ \left(\sqrt{0,7}\right)^2 = 0,7;\ \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, если $a \geq 0$, то $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Примеры.

1) $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$; 2) $\left(-\sqrt{4}\right)^2 = 4$; 3) $-\left(\sqrt{4}\right)^2 = -4$.

Из равенства $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ (где $a \geq 0$) в свою очередь следует, что любое неотрицательное число a можно рассматривать как квадрат некоторого числа, т.е. $a = \left(\sqrt{a}\right)^2$. К примеру,

$$52 = \left(\sqrt{52}\right)^2;\ 0,7 = \left(\sqrt{0,7}\right)^2;\ \frac{1}{3} = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2.$$

Упражнения

А.

1272. Прочитай предшествующий текст и ответь на вопросы.

1) Какое число называется квадратным корнем из числа 81?
2) Какое число называется квадратным корнем из данного положительного числа?
3) Почему нельзя извлечь квадратный корень из отрицательного числа?

1273. Вычисли (устно).

1) $\sqrt{34^2}$, $\sqrt{(-6)^2}$, $\sqrt{0,8^2}$, $\sqrt{2348^2}$, $\sqrt{2^2}$;
2) $\sqrt{674^2}$, $-\sqrt{539^2}$, $\sqrt{(-536)^2}$, $\sqrt{9999^2}$, $\sqrt{(-7)^2}$;
3) $\left(-\sqrt{8}\right)^2$, $\left(-\sqrt{11}\right)^2$, $\left(-\sqrt{2}\right)^2$, $\left[\sqrt{(-3)^2}\right]^2$, $\left[-\left(\sqrt{2}\right)^2\right]^2$;
4) $-\sqrt{(0,2)^2}$, $-\sqrt{(-0,6)^2}$, $\left[-\sqrt{(-0,9)^2}\right]^2$, $-\left[-\sqrt{(-2,4)^2}\right]^2$, $\sqrt{\left[-(-5,2)^2\right]^2}$.

1274. Докажи истинность равенства.

1) $\sqrt{400} = 20$; 2) $\sqrt{676} = 26$; 3) $\sqrt{841} = 29$;
4) $\sqrt{1296} = 36$; 5) $\sqrt{1764} = 42$; 6) $\sqrt{2209} = 47$.

1275. Путем подбора найди значение корня.

1) $\sqrt{144}$; 2) $\sqrt{324}$; 3) $\sqrt{361}$; 4) $\sqrt{0,49}$;
5) $\sqrt{196}$; 6) $\sqrt{256}$; 7) $\sqrt{225}$; 8) $\sqrt{0,09}$;
9) $\sqrt{0,16}$; 10) $\sqrt{121}$; 11) $\sqrt{289}$; 12) $\sqrt{12,25}$.

Б.

1276. Путем подбора найди значение корня.

1) $\sqrt{0,36}$; 2) $\sqrt{2,89}$; 3) $\sqrt{82,81}$; 4) $\sqrt{90,25}$;
5) $\sqrt{6,25}$; 6) $\sqrt{20,25}$; 7) $\sqrt{34,81}$; 8) $\sqrt{56,25}$.

1277. Что больше:

1) $\sqrt{16} + \sqrt{9}$ или $\sqrt{16+9}$; 2) $\sqrt{169} - \sqrt{25}$ или $\sqrt{169-25}$;
3) $0,01\sqrt{400}$ или $400\sqrt{0,01}$; 4) $\frac{\sqrt{900}}{0,1}$ или $\frac{\sqrt{100-64}}{0,01}$?

1278. Найди значения переменной, при которых выражение определено.

1) $\sqrt{x-3}$; 2) $\sqrt{2b-1}$; 3) $\sqrt{8+4c}$; 4) $\sqrt{0,6-1,8a}$.

6.3. Иррациональные числа. Приближенное значение квадратного корня

1. Сначала напомним, что любое число, которое можно представить в виде частного от деления двух целых чисел $\frac{p}{q}$, называется **рациональным числом**. Такими числами являются, например,

$$\frac{1}{2},\ -\frac{3}{4},\ 3 = \frac{3}{1},\ -0,97 = -\frac{97}{100}.$$

При вычислении квадратного корня нетрудно заметить, что квадратный корень из натурального числа не всегда является натуральным числом. Например, $\sqrt{21}$ не является натуральным числом, так как $4^2 = 16 < 21$ и $5^2 = 25 > 21$. Очевидно, что $4 < \sqrt{21} < 5$. Аналогично

$\sqrt{110}$ не натуральное число, потому что $10^2 = 100 < 110$, а $11^2 = 121 > 110$. Отсюда $10 < \sqrt{110} < 11$.

Можно доказать теорему:

если квадратный корень из натурального числа не принадлежит множеству натуральных чисел, то этот квадратный корень не принадлежит и множеству рациональных чисел.

Например, $1 < \sqrt{2} < 2$, $1 < \sqrt{3} < 2$, $2 < \sqrt{5} < 3$, поэтому квадратный корень из чисел 2, 3, 5 не принадлежит множеству натуральных чисел. В соответствии с теоремой значения квадратных корней из этих чисел не принадлежат и множеству рациональных чисел. Все эти квадратные корни могут быть представлены в виде бесконечных **непериодических десятичных дробей**. Например,

$\sqrt{2} = 1,4142135623...$

$\sqrt{3} = 1,7320508075...$

$\sqrt{5} = 2,2360679775...$

Числа, которые могут быть представлены бесконечными непериодическими десятичными дробями, называются **иррациональными.** Таким образом, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ – положительные иррациональные числа. Противоположные им числа: $-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\sqrt{5}$ – отрицательные иррациональные числа. Иррациональные числа появляются не только в результате нахождения квадратного корня. В шестом классе мы узнали, что отношение длины окружности к ее диаметру выражается бесконечной десятичной непериодической дробью, которая обозначается буквой π, причем $\pi = 3,141592653...$ Число π – иррациональное число. Множество иррациональных чисел бесконечно. Оно обозначается буквой ***I***. Рациональные числа вместе с иррациональными числами образуют множество **действительных чисел**, обозначаемое буквой ***R***.

Итак,

$Q \cup I = R$.

Все ранее изученные числовые множества: множество натуральных чисел ***N***, множество целых чисел ***Z***, множество рациональных чисел ***Q*** есть подмножества множества действительных чисел.

1279. Представь число в виде частного двух целых чисел.

1) 29; 2) 2,37; 3) 0,082; 4) 1,0053;

5) –8; 6) –20,06; 7) $-\frac{47}{29}$; 8) –0,0023.

1280. Определи, верно ли утверждение.

1) $4 < \sqrt{19}$; 2) $3 > \sqrt{11}$; 3) $6 > \sqrt{40}$; 4) $7 < \sqrt{51}$.

1281. Найди два последовательных натуральных числа, между которыми заключено данное число.

1) $\sqrt{27}$; 2) $\sqrt{12,8}$; 3) $\sqrt{70}$; 4) $\sqrt{120}$; 5) $\sqrt{205}$; 6) $\sqrt{234}$.

2. При выполнении действий с иррациональными числами обычно ограничиваются их приближенными значениями. Эти числа представляют в виде конечных десятичных дробей, взятых округленными до нужного знака. Например, округление до сотых дает

$\pi \approx 3,14$; $\sqrt{2} \approx 1,41$; $\sqrt{3} \approx 1,73$; $\sqrt{5} \approx 2,24$; $\sqrt{10} \approx 3,16$.

Упражнения

А.

1282. Ответь на основании прочитанного на вопросы.

1) Какое число называется иррациональным?
2) Какое числовое множество образуют рациональные и иррациональные числа?

1283. Найди подбором приближенное значение квадратного корня с точностью до единиц.

1) $\sqrt{3}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt{40}$, $\sqrt{63}$, $\sqrt{89}$, $\sqrt{96}$;

2) $\sqrt{170}$, $\sqrt{223}$, $\sqrt{473}$, $\sqrt{688}$, $\sqrt{962}$, $\sqrt{1010}$.

1284. Что больше:

1) $\sqrt{7}$ или 3; 2) 7 или $\sqrt{50}$; 3) $\sqrt{5}$ или 2,2;

4) $\sqrt{6,26}$ или 2,8; 5) $\sqrt{4,21}$ или 2,1?

1285. Определи, верно ли утверждение.

1) $2,1 \in Q$; 2) $0,8 \in I$; 3) $\sqrt{2} \notin R$; 4) $-\sqrt{7} \in I$;

5) $\sqrt{4} \in Z$; 6) $\sqrt{9} \notin N$; 7) $\sqrt{6,25} \in I$; 8) $\sqrt{0} \notin Z$;

9) $N \subset Z$; 10) $I \not\subset R$; 11) $Q \subset R$; 12) $Z \not\subset R$.

Б.

1286. Докажи, что:

1) $3 < \sqrt{12} < 4$; 2) $6 < \sqrt{43} < 7$; 3) $7,1 < \sqrt{51} < 7,2$.

1287. Найди подбором приближенные значения иррациональных чисел $\sqrt{3}, \sqrt{11}, \sqrt{61}, \sqrt{113}$ с точностью до десятых.

1288. Найди два последовательных целых числа, между которыми заключено данное число.

1) $\sqrt{5}$; 2) $-\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{81}$; 4) $-\sqrt{18}$; 5) $\sqrt{68}$; 6) $-\sqrt{68}$.

1289. Что больше:

1) $\sqrt{29}$ или $\sqrt{10}+\sqrt{19}$; 2) $\sqrt{27}$ или $\sqrt{20}+\sqrt{7}$;

3) $\sqrt{65}$ или $\sqrt{157}-\sqrt{92}$?

6.4. Извлечение квадратного корня на калькуляторе

1. Извлечь квадратный корень из числа можно с помощью калькулятора. Для этого нужно ввести число, а затем нажать клавишу $\boxed{\sqrt{\ }}$. Поэтому схема вычисления: $a\boxed{\sqrt{\ }}$. Найдем, к примеру, квадратный корень из числа 49 по схеме $49\boxed{\sqrt{\ }}$. На экране калькулятора появляется число 7. Аналогично найдем с точностью до сотых, что:

$\sqrt{20,32}\approx 4,51$,

$\sqrt{2165}\approx 46,53$.

1290. Найди с помощью калькулятора квадратный корень из данного числа. Ответ округли до сотых.

1) 3,8;	5,02;	6,71;	12,32;	28,95;	91,05;
2) 128;	371;	926,54;	3796,2;	4489;	9999.

2. Если число меньше, чем 1, то на некоторых калькуляторах значение квадратного корня из числа представляется в стандартном виде. Так, в случае $\sqrt{0,38}$ на экране появляется: 6.1646 –01, что означает сдвиг запятой в ответе **на один знак влево**. Отюда получим ответ: 0,61646, или, при округлении до сотых, 0,62. Итак,

$\sqrt{0,38}\approx 0,62$.

Аналогично при вычислении $\sqrt{0,0000245}$ на экране высвечивается 4.94974 –03, что указывает на необходимость в ответе сдвинуть запятую на **три знака влево**. Тогда ответ будет выглядеть так: 0,00494974, или, при округлении до тысячных, 0,005.

Извлекать квадратные корни можно также с помощью таблиц квадратных корней (см.: Кауге А. Математические таблицы и формулы для основной школы. Таллинн: *AVITA*, 1995).

Упражнения

А.

1291. Извлеки квадратный корень с помощью калькулятора. Ответ округли до тысячных.

1) 0,327;	0,639;	0,298;	0,00481;	0,03007;
2) 0,8485;	0,008867;	0,0548;	0,000765;	0,08094;
3) 0,000049;	0,0000234;	0,008765;	0,00002345;	0,00000062.

1292. Найди сторону квадрата, если его площадь равна:

1) 35,7 дм^2; 2) 9,8 см^2; 3) 0,76 м^2; 4) 9,006 м^2.

1293. Основание равнобедренного треугольника равно 12,8 см, а его высота равна 8,7 см. Найди сторону квадрата, равного по площади данному треугольнику. Ответ округли до десятых.

1294. В прямоугольнике одна сторона равна 6 см и периметр равен 30 см. Найди сторону квадрата, площадь которого равна площади данного прямоугольника. Ответ округли до трех значащих цифр.

1295. Найди радиус круга, если дана его площадь. Ответ округли до десятых.

1) 63,59 см^2; 2) 0,79 м^2; 3) 366,25 см^2; 4) 482,8 дм^2.

1296. Найди длину катета равнобедренного прямоугольного треугольника, если дана его площадь. Ответ округли до сотых.

1) 11,52 см^2; 2) 0,029 м^2; 3) 258,55 дм^2.

Б.

1297. Найди с помощью калькулятора $\sqrt{3}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{23}$ с недостатком и с избытком, округляя до сотых.

1298. Гипотенуза в прямоугольном равнобедренном треугольнике равна 31,2 см, а высота, проведенная к гипотенузе, равна 15,6 см. Какой длины катет этого треугольника? Ответ округли до десятых.

1299. Диагональ квадрата равна 4,78 дм. Найди площадь и сторону квадрата. Ответ округли до сотых.

1300. В квадрат вписан круг (рис. 6.8), площадь которого равна 36,30 см^2. Найди, сколько процентов площади квадрата составляет площадь закрашенной части.

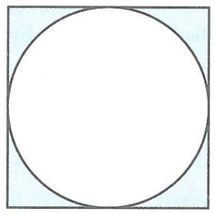

Рис. 6.8

1301. Выясни, каким числом, рациональным или иррациональным, выражается длина стороны квадрата, если площадь квадрата:

1) 34 квадратные единицы; 2) 49 квадратных единиц; 3) 65 квадратных единиц; 4) 100 квадратных единиц. Ответ обоснуй.

6.5. Квадратный корень из произведения. Квадратный корень из дроби

1. Вычислив значения выражений $\sqrt{4\cdot 9}$ и $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}$, мы замечаем, что эти значения равны:

$$\sqrt{4\cdot 9}=\sqrt{36}=6 \text{ и } \sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=2\cdot 3=6.$$

Равенство $\sqrt{4\cdot 9}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}$ – частный случай общего утверждения. Сформулируем его.

ТЕОРЕМА 1. Квадратный корень из произведения неотрицательных чисел равен произведению квадратных корней из множителей.

Условие. $a>0$ и $b>0$.

Заключение. $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$.

Доказательство. Сравним квадраты выражений $\sqrt{a\cdot b}$ и $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$:

$$\left(\sqrt{a\cdot b}\right)^2=a\cdot b,$$

$$\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2\cdot\left(\sqrt{b}\right)^2=a\cdot b.$$

Если квадраты неотрицательных чисел равны, то равны и сами эти числа. Отсюда следует, что

$$\boxed{\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}} \quad ■$$

Примеры.

1) $\sqrt{49\cdot 25}=\sqrt{49}\cdot\sqrt{25}=7\cdot 5=35$

2) $\sqrt{64\cdot 0{,}16}=\sqrt{64}\cdot\sqrt{0{,}16}=8\cdot 0{,}4=3{,}2$

3) $\sqrt{50}\cdot\sqrt{98}=\sqrt{50\cdot 98}=\sqrt{4900}=70$

4) $\sqrt{0{,}08}\cdot\sqrt{0{,}32}=\sqrt{0{,}08\cdot 0{,}32}=\sqrt{0{,}0256}=0{,}16$

1302. Вычисли (устно). Буквы обозначают положительные числа.

1) $\sqrt{16\cdot 81}$; 2) $\sqrt{49\cdot 100}$; 3) $\sqrt{0{,}04\cdot 0{,}36}$;

4) $\sqrt{64a^2b^2}$; 5) $\sqrt{9b^2\cdot 4a^2}$; 6) $\sqrt{25m^2n^2\cdot 0{,}49r^2s^2}$;

7) $\sqrt{0{,}64u^2v^2\cdot 0{,}25k^2m^2n^2}$.

2. Найдем значение выражения $\sqrt{\frac{100}{4}}$. Сначала выполним деление, а затем найдем значение квадратного корня из частного:

$$\sqrt{\frac{100}{4}}=\sqrt{25}=5.$$

Теперь вычислим значение выражения по-другому. Сначала найдем значение квадратного корня из делимого и делителя, а затем – их частное:

$$\sqrt{\frac{100}{4}}=\frac{10}{2}=5.$$

Мы видим, что в обоих случаях получился один и тот же результат.

ТЕОРЕМА 2. Квадратный корень из дроби, числитель которой неотрицателен, а знаменатель положителен, равен квадратному корню из числителя, деленному на квадратный корень из знаменателя.

Условие. $a\ge 0$ и $b>0$.

Заключение. $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Доказательство. Сравним квадраты выражений $\sqrt{\frac{a}{b}}$ и $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$:

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2=\frac{a}{b},\quad \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2}=\frac{a}{b}.$$

Следовательно,

$$\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}} \quad ■$$

Примеры.

1) $\sqrt{\frac{81}{16}}=\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{16}}=\frac{9}{4}=2\frac{2}{4}$;

2) $\sqrt{\frac{64}{0{,}16}}=\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{0{,}16}}=\frac{8}{0{,}4}=20$;

3) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{32}}=\sqrt{\frac{72}{32}}=\sqrt{\frac{36}{16}}=\frac{6}{4}=1{,}5$;

4) $\frac{\sqrt{0{,}12}}{\sqrt{0{,}75}}=\sqrt{\frac{0{,}12}{0{,}75}}=\sqrt{0{,}16}=0{,}4$.

Упражнения

А.

1303. Прочитай текст параграфа и объясни:

1) почему в теореме о квадратном корне из произведения оба множителя должны быть неотрицательными?

2) почему в теореме о квадратном корне из дроби требуется, чтобы знаменатель был положительным?

1304. Извлеки квадратный корень ($a\ge 0$; $b>0$; $m\ge 0$).

1) $\sqrt{\frac{25}{121}}$; 2) $\sqrt{\frac{16}{0{,}01}}$; 3) $\sqrt{\frac{a^2}{49}}$; 4) $\sqrt{\frac{4m^2}{9}}$; 5) $\sqrt{\frac{81a^2}{b^2}}$.

1305. Вычисли.

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$; 2) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}$; 3) $\sqrt{48}\cdot\sqrt{75}$; 4) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{242}$; 5) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{80}$.

1306. Вычисли.

1) $\frac{\sqrt{162}}{\sqrt{50}}$; 2) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{147}}$; 3) $\frac{\sqrt{0,20}}{\sqrt{0,80}}$; 4) $\frac{\sqrt{0,28}}{\sqrt{1,75}}$; 5) $\frac{\sqrt{12,5}}{\sqrt{0,32}}$.

1307. Вычисли наиболее рациональным способом.

1) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{14}}\cdot\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{56}}$; 2) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{12}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{48}}$; 3) $\frac{\sqrt{0,18}}{\sqrt{162}}\cdot\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{0,08}}$; 4) $\frac{\sqrt{0,2}}{\sqrt{0,72}}\cdot\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{98}}$.

Б.

1308. Раскрой скобки и вычисли наиболее рациональным способом.

1) $\sqrt{6}\left(\sqrt{54}+\sqrt{96}\right)$; 2) $\sqrt{14}\left(\sqrt{56}-\sqrt{126}\right)$;

3) $\left(\sqrt{20}+\sqrt{5}\right)^2$; 4) $\left(\sqrt{27}-\sqrt{12}\right)^2$;

5) $\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{30}\right)^2$; 6) $\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2,5}-\sqrt{5}\cdot\sqrt{0,25}\right)^2$;

7) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{84}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{189}}{\sqrt{27}}\right)$; 8) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{8}}\left(\frac{\sqrt{375}}{\sqrt{32}}+\frac{\sqrt{135}}{\sqrt{128}}\right)$;

9) $\left(\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{125}}-\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{5}}\right)^2$.

1309. Найди значение выражения $\sqrt{a^2-b^2}$, если:

1) $a=50, b=48$; 2) $a=61, b=11$; 3) $a=45, b=27$.

1310. Докажи, что утверждение справедливо.

1) $\sqrt{3^2+4^2}<3+4$; 2) $\sqrt{10^2-6^2}>10-6$; 3) $\sqrt{25^2-24^2}>25-24$.

1311. *Докажи, что равенство $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$:

1) не выполняется в общем случае;
2) выполняется только при дополнительных условиях.
Укажи эти условия.

1312. *Где ошибка?

$1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)\cdot(-1)}=\left(\sqrt{-1}\right)\cdot\left(\sqrt{-1}\right)=\left(\sqrt{-1}\right)^2=-1.$

6.6. Преобразование квадратных корней

Выражения, содержащие квадратные корни, приводятся к более простому виду преобразованием этих корней. Чаще всего используют вынесение множителя из-под знака корня и внесение множителя под корень.

Если $a\ge 0$ и $k\ge 0$, то в соответствии с теоремой о квадратном корне из произведения

$\sqrt{k^2\cdot a}=\sqrt{k^2}\cdot\sqrt{a}=k\cdot\sqrt{a}$, откуда $\sqrt{k^2a}=k\sqrt{a}$.

Поменяв местами части равенства, получаем

$k\sqrt{a}=\sqrt{k^2a}$.

Таким образом,

положительное число, квадрат которого является множителем подкоренного выражения, можно вынести из-под знака корня; квадрат положительного числа, стоящего перед знаком корня, может быть внесен под знак корня как множитель подкоренного выражения.

Примеры.

1) $\sqrt{16\cdot 5}=4\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{25a}=5\sqrt{a}$ $(a\ge 0)$;

3) $\sqrt{200}=\sqrt{2\cdot 100}=10\sqrt{2}$; 4) $5\sqrt{3}=\sqrt{25\cdot 3}=\sqrt{75}$;

5) $-2\sqrt{5}=(-1)\cdot 2\sqrt{5}=(-1)\cdot\sqrt{4\cdot 5}=-\sqrt{20}$.

Упражнения

А.

1313. Вынеси множитель из-под знака корня.

1) $\sqrt{12}$; 2) $\sqrt{18}$; 3) $\sqrt{50}$; 4) $\sqrt{48}$; 5) $\sqrt{108}$.

1314. Вынеси множитель из-под знака корня и упрости выражение.

1) $\frac{1}{2}\sqrt{24}$; 2) $\frac{2}{3}\sqrt{45}$; 3) $-1,2\sqrt{300}$; 4) $-\frac{1}{7}\sqrt{147}$; 5) $-\frac{1}{5}\sqrt{275}$.

1315. Внеси множитель под знак корня и упрости выражение.

1) $3\sqrt{10}$; 2) $5\sqrt{3}$; 3) $6\sqrt{1,5}$; 4) $3\sqrt{\frac{2}{3}}$;

5) $-5\sqrt{2}$; 6) $-12\sqrt{\frac{c}{2}}$; 7) $\frac{1}{2}\sqrt{6x}$; 8) $-\frac{2}{3}\sqrt{3y}$.

1316. Вынеси множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{5a^2}$, где $a\ge 0$; 2) $\sqrt{10b^2}$, где $b<0$; 3) $\sqrt{16x^2}$, где $x>0$.

1317. Внеси множитель под знак корня:

1) $a\sqrt{3}$, где $a > 0$; 2) $b\sqrt{\frac{3}{b^2}}$, где $b > 0$; 3) $c^2\sqrt{\frac{5}{c}}$, где $c > 0$.

Б.

1318. Сравни:

1) $3\sqrt{3}$ и $\sqrt{12}$; 2) $\sqrt{20}$ и $3\sqrt{5}$ 3) $2\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$;

4) $5\sqrt{4}$ и $4\sqrt{5}$; 5) $\frac{1}{3}\sqrt{54}$ и $\frac{1}{5}\sqrt{150}$; 6) $3\sqrt{120}$ и $2\sqrt{270}$;

7) $\sqrt{72}$ и $0{,}5\sqrt{162}$; 8) $\sqrt{24}$ и $\frac{1}{9}\sqrt{216}$; 9) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ и $6\sqrt{\frac{1}{2}}$;

10) $\frac{2}{3}\sqrt{72}$ и $7\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Указание. Для сравнения выражений внеси множитель под знак корня или вынеси множитель из-под знака корня. Упрости полученные выражения и затем сравни их.

1319. Разложи на множители.

1) $\sqrt{14}-\sqrt{7}$; 2) $\sqrt{33}+\sqrt{22}$; 3) $\sqrt{15}-\sqrt{6}$;

4) $3+\sqrt{3}$; 5) $10-2\sqrt{10}$; 6) $a-5\sqrt{a}$.

1320. Упрости выражение, используя формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

1) $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)$

2) $\left(\sqrt{11}-3\right)\left(\sqrt{11}+3\right)$

3) $\left(\sqrt{10}+7\right)\left(7-\sqrt{10}\right)$

4) $\left(2\sqrt{5}+\sqrt{19}\right)\left(2\sqrt{5}-\sqrt{19}\right)$

5) $\left(3\sqrt{6}+2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{6}-2\sqrt{3}\right)$

6.7. Что такое квадратное уравнение?

1. Рассмотрим следующую задачу.

На рисунке 6.9 изображен прямоугольник, площадь которого равна 40 см² и одна из сторон которого на 3 см длиннее другой. Каковы стороны этого прямоугольника?

Чтобы найти длины сторон прямоугольника, необходимо решить уравнение

$x(x+3)=40$, или $x^2+3x-40=0$.

Полученное уравнение является **квадратным уравнением**. Это – новый для нас вид уравнений. Позже мы научимся их решать. В общем случае:

уравнение $ax^2+bx+c=0$, где a, b, c – заданные числа ($a \neq 0$) и x – неизвестное, называется квадратным уравнением.

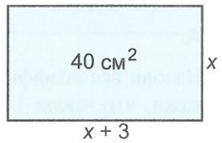

Рис. 6.9

Числа a, b, c – **коэффициенты квадратного уравнения**. Например, в уравнении $x^2+3x-40=0$ имеем $a=1$, $b=3$ и $c=-40$. Члены квадратного уравнения имеют следующие названия:

ax^2 – квадратичный член (член с неизвестным во второй степени);

bx – линейный член (член с неизвестным в первой степени);

c – свободный член (не содержит неизвестного).

1321. Назови коэффициенты, квадратичный, линейный и свободный члены в уравнениях.

1) $2x^2+5x+7=0$; 2) $3x^2-4x+5=0$;

3) $-3x^2+2x-5=0$; 4) $x^2-x+7=0$.

1322. Докажи, что числа –8 и 5 являются корнями уравнения $x^2+3x-40=0$, данного в начале параграфа. Оба ли эти числа являются решениями соответствующей задачи? Почему?

2. В дальнейшем можем полагать, что коэффициент квадратичного члена $a > 0$. Если же $a < 0$, то будем умножать обе части уравнения на –1 и получать положительный коэффициент у квадратичного члена.

Квадратное уравнение, в левой части которого на первом месте расположен квадратичный член с положительным коэффициентом, на втором месте – линейный член, на третьем месте – свободный член, а в правой части – нуль, называется **квадратным уравнением стандартного вида.** Например, уравнение $3x^2+2x-7=0$ записано в стандартном виде, а уравнение $-4x^2+2x=-4$ нет.

Если в квадратном уравнении стандартного вида присутствуют все три члена (ни один коэффициент не равен 0), то оно является **полным квадратным уравнением.** Если же в квадратном уравнении отсутствует или линейный член, или свободный член, или они оба, то такое уравнение называется **неполным квадратным уравнением.** Например, уравнения $2x^2-7x=0$; $3{,}8x^2-1{,}3=0$ и $10x^2=0$ – это неполные квадратные уравнения.